

TABLE DES MATIERES

Chapitre I. Analyse Vectorielle

Chapitre I. Analyse Vectorielle

Chapitre I. Analyse Vectorielle

I. Définition	1
II. Lignes isoscalaires	1
III. Liaison entre champ scalaire et fonction de plusieurs variables.	1

Chapitre I. Analyse Vectorielle

I. Définition	3
II. Lignes de Champ	3
III. Liaison entre champ de vecteurs et fonction vectorielle	4

Chapitre I. Analyse Vectorielle

Chapitre I. Analyse Vectorielle

I. Intégrale Curviligne	5
II. Circulation scalaire d'un vecteur le long d'un arc orienté.	6
III. Intégrale de surface	7
IV. Flux d'un vecteur à travers une surface	8
Fonction de points pour un champ scalaire et un champ de vecteurs	9

Chapitre I. Analyse Vectorielle

Chapitre I. Analyse Vectorielle

I. Gradient d'un scalaire en un point	9
II. Divergence d'un vecteur en un point	14
III. Rotationnel d'un vecteur en un point	19

Exercices Corrigés

Chapitre II. Séries

I. Séries numériques	30
1/ Convergence d'une série numérique	30
2/ Critères essentiels de convergence et de divergence des séries à termes positifs.	32
3/ Séries alternées : Théorème de Leibniz.	35

4/ Séries à termes de signes quelconques, convergence absolue et semi-convergence	36
5/ Séries à termes complexes	37
6/ Opérations algébriques sur les séries	38
II. Séries de fonctions	39
1/ Définitions	39
2/ Propriétés des séries de fonctions	39
2.1/ Convergence simple	40
2.2/ Convergence uniforme	40
2.3/ Critères de convergence	41
2.4/ Séries majorantes	42
2.5/ Critère de convergence normale	42
2.6/ Propriétés générales	43
Exercices corrigés	44
Chapitre III. Les Intégrales Multiples	55
I. Intégrales doubles	55
1/ Somme Intégrale et Intégrale double	56
2/ Propriétés de l'intégrale double	56
3/ Calcul des Intégrales doubles en coordonnées cartésiennes	56
II. Changement de variables dans l'intégrale double	59
1/ Changement de variable : $x = \rho \cos \theta$, $y = \rho \sin \theta$	59
2/ Changement de variable : $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$	61
III. Intégrales Triples	62
1/ Définition	62
2/ Propriétés	62
3/ Calcul des Intégrales triples en coordonnées cartésiennes	63
4/ Centre de gravité d'un volume	64
5/ Changement de variables dans une intégrale triple	64
$x = x(u, v, w)$, $y = y(u, v, w)$, $z = z(u, v, w)$	
Exercices Corrigés	67

IV

IV Intégrales de Surface	
1.1 Notion de surface	
2.1 Intégrale de surface	
V Formules de Stokes et d'Ostrogradsky	
1.1 Formule de Green Riemann	
2.1 Formule de Stokes	
3.1 Formule d'Ostrogradsky	
Exercices Corrigés	
Chapitre IV Les Equations différentielles	
I Définition	
II Théorème d'existence et d'unicité de la solution d'une équation différentielle du 1 ^{er} ordre	
1.1 Fonction Lipschitzienne	
2.1 Théorème d'existence et d'unicité	
III Equations différentielles d'ordre supérieur à deux	
1.1 Définition	
2.1 Cas d'une fonction linéaire	
3.1 Théorème	
4.1 Equation différentielle du second ordre	
Exercices corrigés	
Chapitre V. Notions sur les distributions	
I Mesures - Intégration	
1.1 Algèbre de boole. Tribu	
2.1 Mesure sur une tribu	
3.1 Convergence et intégration des fonctions mesurables	
4.1 Propriétés de l'intégrale de Lebesgue	
5.1 Autres propriétés de l'intégrale de Lebesgue	
6.1 Espace fonctionnel L_1	
7.1 Les mesures en tant que fonctionnelles linéaires	

V

I Distributions	126
1/ Exemple de distributions de charge en électrostatique	126
2/ Espace vectoriel D	127
3/ Les distributions	129
4/ Opérations sur les distributions	131
5/ Convergence	135
Exercices corrigés	137
Chapitre VI Les Séries de Fourier	146
I Les séries trigonométriques	146
1/ Définition	146
2/ Convergence	146
3/ Calcul des coefficients	148
4/ Remarque sur les formules du calcul des coefficients	149
5/ Généralisation	149
II Les Séries de Fourier	150
1/ Définition	150
2/ Théorème de Dirichlet	150
Exercices Corrigés	151
Chapitre VII Les Transformations de Fourier	163
I Intégrale de Fourier	163
II Forme complexe de l'intégrale de Fourier	164
III Transformations de Fourier	164
IV Interprétation de la T.F des fonctions non périodiques	166
I Propriétés de la T.F	166
1/ Inversion	167
2/ Linéarité	167
3/ Similitude	167
4/ Translation	167
5/ Dérivation	167

6.1 Convolution	
Exercices corrigés	
Chapitre VIII Transformation de Laplace	
I Définitions et existence	
1/ Généralités	
2/ Fonctions d'ordre exponentiel	
II Propriétés	
1/ Linéarité	
2/ Homothétie	
3/ Dérivation	
4/ Intégration	
5/ Proposition	
6. - 7/ Propositions	
8/ Théorème du retard	
III Applications	
1/ Application aux équations différentielles	
2/ Application aux systèmes d'équations différentielles	
Exercices Corrigés	

Chapitre IX Equations aux dérivées partielles du second ordre.

I Classification	
II Problèmes aux limites	
1/ Problème elliptique	
2/ Problème hyperbolique	
3/ Problème parabolique	
III Méthode de Séparation des Variables	
IV Cas de la corde vibrante	
1/ Méthode des caractéristique	
2/ Méthode de séparation des variables	

I Equation de la chaleur	196
1) Problème de Cauchy	196
2) Problème aux limites	196
Exercices corrigés	199
Chapitre V Calcul des Variations	206
I Problème de la brachistochrone	206
II Problème pour une intégrale multiple	207
III Lemmes fondamentaux	208
IV Equation d'Euler dans le cas simple	209
V Equation d'Euler dans le cas d'une fonctionnelle J	211
du type $J = \int_{x_0}^{x_1} f(x, y, y', \dots, y^{(n)}) dx = 0$	
VI Equation d'Euler dans le cas d'une fonctionnelle J	212
du type $J = \int_{x_0}^{x_1} f(x, x_1, \dots, x_n, x'_1, \dots, x'_n) dx = 0$	
VII Extremes. Liés - problèmes isopérimétriques	213
VIII Remarques relatives aux équations d'Euler	213
Exercices corrigés	215
	218
Exercices et problèmes sans solutions	219

CHAMP SCALAIRE

I/ Définition

Un champ scalaire est une application d'un domaine de l'espace sur les nombres réels: A tout point M de définition, on associe un nombre réel U , noté $U(M)$

$$M \in \mathbb{R}^3 \longrightarrow U(M) \in \mathbb{R}$$

Continuité: On dit que le champ scalaire U est continu en M_0 lorsque la différence $U(M_0) - U(M)$ devient aussi petite que l'on veut quand M tend vers M_0 . Si l'on note $d(M_0, M)$ la distance du point M à M_0 , cette définition équivaut à:

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta : d(M_0, M) < \eta, |U(M_0) - U(M)| < \epsilon$$

II/ Lignes isocales

Un champ scalaire ayant été défini, on considère l'ensemble des points M de l'espace pour lesquels on ait $U(M) = U_0$. Si l'ensemble de ces points constitue une ligne, une surface, un volume, on parle de ligne, de surface, de volume isocale. L'ensemble des points M de même cote M_0 est donc défini par $U(M) = U_0$.

Si par un point d'un champ scalaire continu passe une isocale, il n'en passe qu'une seule. En effet si il en passait deux différentes U_0 et U_1 , cela signifierait qu'à un point on a deux cotes U_0 et U_1 , ce qui est contraire à la définition du champ scalaire. Une isocale peut être fermée ou non, avoir des points de tangence, etc.

III/ Liaison entre champ scalaire et fonction de plusieurs variables

On peut repérer les points M de l'espace au moyen d'un système de coordonnées. Alors à tout point M est associé un triplet de réels (x, y, z) et inversement. On peut donc définir