

TABLE DES MATIERES

Chapitre 1 : SERIES NUMERIQUES

1.1 Généralités	1
1.1.1 Définitions	
1.1.2 Conditions de convergence	
1.1.3 Espace vectoriel des séries convergentes	
1.2 Séries à termes positifs	3
1.3 Séries semi-convergentes	6
1.3.1 Séries alternées	
1.3.2 Règle d'Abel	
1.3.3 Groupement de termes	
1.4 Opérations sur les séries absolument convergentes	8
1.4.1 Série produit	
1.4.2 Convergence commutative	
1.5 Comportement asymptotique	9
1.6 Produits infinis	10
1.7 Séries doubles	11
Enoncés des exercices	14
Corrigés des exercices	25

Chapitre 2 : SUITES ET SERIES DE FONCTIONS

2.1 Suites de fonctions	51
2.1.1 Généralités	
2.1.2 Propriétés de la limite d'une suite de fonctions	
2.2 Séries de fonctions	52
2.2.1 Définitions	
2.2.2 Conditions suffisantes de convergence uniforme	
2.2.3 Propriétés de la somme d'une série de fonctions	
Enoncés des exercices	55
Corrigés des exercices	61

Chapitre 3 : SERIES ENTIERES

3.1 Convergence d'une série entière	79
3.1.1 Généralités	
3.1.2 Rayon de convergence	
3.1.3 Détermination du rayon de convergence	
3.1.4 Propriétés du rayon de convergence	
3.1.5 Convergence uniforme d'une série entière	
3.2 Somme d'une série entière	82
3.3 Fonctions développables en série entière	83
3.4 Développement en série entière des fonctions usuelles	85
3.5 La fonction exponentielle complexe	86
3.5.1 La fonction exponentielle complexe	
3.5.2 Les fonctions circulaires complexes	
Enoncés des exercices	88
Corrigés des exercices	96

Chapitre 4 : SERIES DE FOURIER

4.1 Séries trigonométriques	121
4.1.1 Généralités	
4.1.2 Forme exponentielle d'une série trigonométrique	
4.2 Séries de Fourier	123
4.2.1 Définitions	
4.2.2 Propriétés des coefficients de Fourier	
4.3 Convergence d'une série de Fourier	126
4.3.1 Convergence ponctuelle (Théorème de Dirichlet)	
4.3.2 Convergence en moyenne quadratique (Théorème de Parseval)	
Enoncés des exercices	129
Corrigés des exercices	135

CHAPITRE 1

SERIES NUMERIQUES

1.1 GENERALITES

1.1.1 Définitions

Définition. Soit (u_n) une suite de nombres complexes. On dit que la série de terme général u_n converge si la suite (S_n) définie par

$$S_n = \sum_{k=0}^n u_k = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$$

converge dans $\mathbb{C}$. Dans ce cas, sa limite S est appelée somme de la série et notée $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$. Dans le cas contraire on dit que la série diverge.

Remarques.

1. On écrit $\sum u_n$ pour « la série de terme général u_n ».
2. $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$ est appelée somme partielle d'indice n de la série $\sum u_n$.
Si la série converge, $R_n = S - S_n$ est appelé reste d'indice n de la série.
3. Si la suite (u_n) est définie à partir d'un rang n_0 , la suite (S_n) est définie pour $n \geq n_0$ par

$$S_n = \sum_{k=n_0}^n u_k = u_{n_0} + \cdots + u_n.$$

Si elle converge, sa limite est notée $\sum_{n=n_0}^{\infty} u_n$.