

SOMMAIRE.

Chapitre 1 - Fonctions analytiques	
§1.1. Développement en série de Fourier.....	1
§1.2. Développement des fonctions analytiques en série entière.....	5
§1.2.1. Ensemble des zéros d'une fonction analytique.....	13
§1.2.2. Principe du maximum.....	15
§1.2.3. Lemme de Scharz et automorphismes du disque unité.....	18
§1.3. Singularités d'une fonction analytique.....	19
§1.3.1. Classification des singularités.....	21
Exercices.....	23
 Chapitre 2 - Fonctions harmoniques	
§2.1. Equations de Cauchy Riemann.....	31
§2.2. Fonctions harmoniques.....	33
§2.2.1. Fonctions harmoniques dans un disque.....	35
§2.3. Problème de Dirichlet.....	39
§2.3.1. Cas du disque unité.....	39
§2.3.2. Cas du demi plan supérieur.....	41
§2.4. Principe de symétrisation de Schwarz.....	43
Exercices.....	46
 Chapitre 3 - Théorème de Cauchy	
§3.1. Integration le long d'un arc.....	51
§3.2. Ouvert simplement connexe.....	54
§3.3. Primitive d'une fonction analytique.....	58
§3.4. Formule des résidus.....	62
§3.5. Résidu à l'infini.....	65
§3.6. Variation de l'argument et théorème de Rouché.....	68
§3.7. Théorème de l'application ouverte.....	70
Exercices.....	76

Chapitre 4 - Calcul d'intégrales et développements en série

§4.1. Calcul des résidus.....	85
§4.1.1. En un pôle.....	85
§4.1.2. En un point singulier essentiel.....	88
§4.1.3. Au point à l'infini.....	88
§4.2. Calcul de coefficients de Fourier.....	90
§4.3. Calcul d'intégrales de Fourier.....	92
§4.3.1. Intégrale et transformée de Fourier.....	92
§4.3.2. Méthode de calcul de l'intégrale de Fourier.....	94
§4.3.3. Transformée de Fourier de $k(x) = \frac{1}{x}$	95
§4.3.3.1. Etude de $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\gamma(0,n)} F(z) dz$	96
§4.3.3.2. Etude de $\lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} \int_{\gamma(0,\varepsilon)} F(z) dz$	97
§4.3.3.3. Intégrale de Dirichlet.....	97
§4.3.4. Transformée de Fourier d'une fonction rationnelle.....	98
§4.3.4.1. Etude de $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\gamma^+(0,n)} F(z) dz$	99
§4.4. Calcul d'intégrales de fonctions avec branches puissances.....	106
§4.4.1. Calcul de l'intégrale $I(s) = \int_0^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} x^{s-1} dx$	107
§4.4.1.1. Etude de $\lim_{\substack{\omega \rightarrow 0 \\ \varepsilon \rightarrow 0 \\ R \rightarrow \infty}} \int_L F(z) dz$	108
§4.4.1.2. Etude de $\lim_{\substack{\omega \rightarrow 0 \\ \varepsilon \rightarrow 0 \\ R \rightarrow \infty}} \int_\gamma F(z) dz$	109
§4.4.2. Calcul de $I(s, t) = \int_0^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} (x-a)^{s-1} (b-x)^{t-1} dx$	112
§4.4.2.1. Etude de $\lim_{\substack{\omega \rightarrow 0 \\ \varepsilon \rightarrow 0}} \int_{L(\omega,\varepsilon)-L(-\omega,\varepsilon)} F(z) dz$	115
§4.4.2.2. Etude de $\lim_{\substack{\omega \rightarrow 0 \\ \varepsilon \rightarrow 0}} \int_{-(\gamma(a,\varepsilon)+\gamma(b,\varepsilon))} F(z) dz$	116
§4.5. Développements en série eulérienne.....	119
Exercices.....	122

Chapitre 5 - Espace des fonctions analytiques

§5.1. Topologie de l'espace $\mathcal{H}(G)$ des fonctions analytiques.....	130
§5.2. -Compacité dans $\mathcal{H}(G)$	137

§5.3. Espace des fonctions harmoniques.....	139
Exercices.....	140

Chapitre 6 - Produit infini

§6.1. Produit dans $\mathbb{C}$	145
§6.2. Produit infini dans $\mathcal{H}(G)$	149
§6.3. Factorisation de Weierstrass des fonctions entières.....	152
§6.4. Factorisation de Blaschke.....	155
§6.5. Factorisation d'une fonction analytique dans un ouvert.....	158
Exercices.....	161

Chapitre 7 - Transformations conformes

§7.1. Transformation conforme.....	167
§7.2. Représentation conforme: théorème de Riemann.....	170
§7.2.1. Représentation conforme d'un triangle équilatéral.....	174
§7.3. Approximation uniforme par des polynômes.....	179
§7.3.1. Rappels sur l'espace C_∞	181
Exercices.....	185

Chapitre 8 - Formules sommatoires

§8.1. Polynômes et nombres de Bernoulli.....	191
§8.1.1. Polynômes de Bernoulli.....	191
§8.1.2. Fonctions et nombres de Bernoulli.....	194
§8.2. Formules sommatoires.....	200
§8.2.1. Formule sommatoire d'Euler-Maclaurin d'ordre 0.....	200
§8.2.2. Forme sommatoire de Poisson.....	204
§8.2.3. Formule sommatoire d'Euler-Maclaurin d'ordre n	207
Exercices.....	211

Chapitre 9 - Fonctions Gamma et Zêta

§9.1. La fonction gamma.....	218
§9.1.1. Généralités sur la fonction gamma.....	218
§9.1.1.1. La constante d'Euler.....	218
§9.1.1.2. Formule de Gauss et relation fonctionnelle.....	219
§9.1.1.3. Formule des compléments.....	219
§9.1.1.4. Pôles de la fonction Gamma.....	220

FONCTIONS ANALYTIQUES

§9.1.1.5. Dérivée logarithmique de la fonction Gamma.....	220
§9.1.1.6. Représentation intégrale de la fonction Gamma.....	223
§9.1.1.7. Développement asymptotique de Γ	224
§9.2. La fonction bêta.....	228
§9.3. La fonction Zêta de Riemann.....	229
§9.3.1. Représentation intégrale de la fonction Zêta.....	229
§9.3.2. Prolongement analytique de la fonction Zêta.....	231
§9.3.3. Relation fonctionnelle de la fonction Zêta.....	232
§9.3.4. Zéros de la fonction Zêta.....	236
Exercices.....	239

Chapitre 10 - Théorème des nombres premiers

§10.1. La fonction Ψ de Chebycheff.....	246
§10.2. Relations entre les fonctions ζ et Ψ	249
§10.3. Théorème des nombres premiers.....	251
Exercices.....	257

C'est à travers la méthode de Weierstrass que nous entamons l'étude d'une fonction holomorphe ou analytique. Cette méthode consiste à représenter, localement, une telle fonction par la somme d'une série entière et c'est pour cette raison qu'on retient le mot analytique plutôt que celui d'holomorphe.

C'est par la propriété d'être de classe C^1 dans un ouvert G que nous définissons une fonction analytique. Cette propriété permet d'établir, pour r convenablement choisi, que la fonction périodique $g_r : t \mapsto f(re^{it})$ admet un développement en série de Fourier uniformément convergent. On déduit pour f un développement en série entière, à la base de deux résultats fondamentaux, le principe des zéros isolés et celui du prolongement analytique sous la condition d'imposer la connexité à G .

En exploitant la convergence en moyenne quadratique de la série de Fourier de g_r ou la propriété équivalente de l'égalité de Parseval, nous mettons en évidence un autre résultat remarquable à savoir le principe du maximum.

§ 1.1. Développement en série de Fourier.

Les fonctions dont on étudiera les séries de Fourier seront continues sur $\mathbb{R}$, 2π -périodiques et à valeurs complexes. Désignons par E l'ensemble de ces fonctions qu'on munit du produit scalaire

$$(f | g) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \overline{g(t)} dt$$

et de la norme associée

$$\|f\|^2 = (f | f)$$