

Table des matières

Preface	ix
I Cours	1
1 Ensembles	3
1.1 Notions de logique	3
1.1.1 Connecteurs logiques	3
1.1.2 Lois logiques	6
1.1.3 Principes du raisonnement	8
1.2 Ensembles	9
1.2.1 Vocabulaire	9
1.2.2 Sous-ensembles	11
1.2.3 Opérations élémentaires	12
1.2.4 Propriétés des opérations élémentaires	16
1.3 Applications	17
1.3.1 Définitions	17
1.3.2 Image directe, image réciproque	20
1.3.3 Composition des applications	22
1.3.4 Famille d' éléments d'un ensemble	24
1.3.5 Application caractéristique	24
1.4 Injectivité, surjectivité, bijectivité	26
1.4.1 Application injective	26
1.4.2 Application surjective	28
1.4.3 Application bijective	29
1.5 Relation binaire	32
1.5.1 Relation d'équivalence	33

TABLE DES MATIÈRES

1.5.2	Relation d'ordre	37
1.5.3	Fonction croissante, décroissante	41
1.6	Ensembles finis, infinis	42
1.6.1	Ensembles finis	44
1.6.2	Ensembles infinis, dénombrables	48
1.7	Exercices	51
2	Structures algébriques	61
2.1	Loi de composition interne	61
2.1.1	Définitions	61
2.1.2	Propriétés d'une l.c.i	62
2.2	Groupes	71
2.2.1	Généralités	71
2.2.2	Sous-groupes	73
2.2.3	Morphismes de groupe	76
2.2.4	Classes suivant un sous-groupe	79
2.2.5	Groupe quotient	81
2.3	Le groupe symétrique	84
2.3.1	Définitions	84
2.3.2	Cycles et transpositions	86
2.3.3	Décomposition d'une permutation	88
2.3.4	Signature d'une permutation	94
2.4	Anneaux	98
2.4.1	Définitions	98
2.4.2	Sous-anneaux, idéaux	100
2.4.3	Anneaux intègres	101
2.4.4	Morphismes d'anneaux	102
2.4.5	Anneaux quotient d'un anneau	103
2.5	Corps	107
2.5.1	Sous-corps	108
2.5.2	Corps des fractions d'un anneau intègre	109
2.5.3	Caractéristique d'un corps	110
2.5.4	Histoire du corps des quaternions	112
2.6	Exercices	113

TABLE DES MATIÈRES

3	Arithmétique dans $\mathbb{Z}$	125
3.1	Divisibilité	125
3.1.1	Généralités	125
3.1.2	Plus grand commun diviseur	128
3.1.3	Entiers premiers entre eux	131
3.1.4	Applications	134
3.1.5	Plus petit commun multiple	138
3.1.6	Nombres premiers	140
3.2	Exercices	143
4	Polynômes à une variable	149
4.1	Suites de $\mathbb{K}$ à support fini	149
4.1.1	Opérations dans $\mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$	150
4.2	L'anneau $\mathbb{K}[X]$	153
4.2.1	Opérations sur $\mathbb{K}[X]$	154
4.2.2	Degré et valuation	155
4.2.3	Evaluation des polynômes	159
4.2.4	Dérivation des polynômes	163
4.3	Arithmétique dans $\mathbb{K}[X]$	169
4.3.1	Divisibilité dans $\mathbb{K}[X]$	169
4.3.2	Division euclidienne	172
4.3.3	Plus grand commun diviseur	175
4.3.4	Polynômes premiers entre eux	179
4.3.5	Plus petit commun multiple	186
4.3.6	P_{gcd} et P_{pcm} de plusieurs polynômes	188
4.4	Factorisation des polynômes	191
4.4.1	Racines d'un polynôme	191
4.5	Polynômes de $\mathbb{R}[X]$ ou de $\mathbb{C}[X]$	195
4.5.1	Relations entre coefficients et racines	195
4.5.2	Factorisation des polynômes	199
4.6	Division suivant les puissances croissantes	201
4.7	Exercices	202
5	Fractions rationnelles	209
5.1	Le corps des fractions rationnelles	209
5.1.1	L'ensemble $\mathbb{K}(X)$	209
5.1.2	Addition, multiplication dans $\mathbb{K}(X)$	210

TABLE DES MATIÈRES

5.2	Définitions	211
5.2.1	Forme irréductible	211
5.2.2	Degré d'une fraction rationnelle	212
5.2.3	Zéros, pôles d'une fraction rationnelle	213
5.3	Décomposition en éléments simples	215
5.3.1	Étude théorique	215
5.3.2	Calcul pratique	220
Bibliographie et Index		231
II Exercices corrigés		237
Énoncés des exercices		239
Corrigés des exercices		269

Préface

Ce que doivent connaître les étudiants, en mathématique, durant le premier cycle universitaire n'a pas trop changé durant les trente dernières années. Ce qui a changé, par contre, c'est la façon de travailler dans les lycées et collèges avec l'apparition, de plus en plus répandue, des cours de soutien scolaire. En arrivant à l'université les nouveaux étudiants ont par conséquent des difficultés pour s'initier à résoudre des problèmes en déployant un raisonnement mathématique.

Les méthodes d'enseignement et les ouvrages universitaires doivent évoluer. A mon avis, il faut proposer des cours, le plus possible auto contenus, présentés avec un langage le plus simple possible et soutenus par des exemples élémentaires. Telle est l'ambition de ce livre qui compte deux parties : une première partie consacrée au cours, couvrant tout le programme d'algèbre du premier semestre des universités et écoles préparatoires et une deuxième partie, réservée à des exercices corrigés permettant ainsi au lecteur d'assimiler les différents concepts et de tester les diverses techniques de calcul.

Ce cours a été rédigé dans un esprit aussi simple que possible et n'utilise que des bases mathématiques élémentaires. Il recouvre tout le programme officiel et le dépasse parfois. Il est conçu pour être consulté par une population variée d'étudiants, comprenant les élèves des classes préparatoires et les étudiants du premier cycle des universités, et ce, à chaque fois qu'un étudiant a besoin d'une notion liée au programme. L'ensemble des sujets traités dépasse ce qui peut être enseigné en un semestre universitaire normal. L'exposé est en général détaillé de façon à permettre aux étudiants l'apprentissage