

TABLE DES MATIÈRES

N° des leçons	Pages
1. Valeurs propres. Vecteurs propres. Diagonalisation	3
2. Trigonalisation	10
3. Polynôme minimal	15
4. Réduction de Jordan	24
5. Formes bilinéaires symétriques. Formes quadratiques	33
6. Formes quadratiques réelles. Espaces euclidiens	45
7. Produit mixte. Produit vectoriel	61
8. Formes sesquilineaires hermitiennes. Formes quadratiques hermitiennes. ...	67
9. Espaces hermitiens	74
Problèmes de révision générale	80
Exercices et problèmes non résolus	93
Problèmes d'examen	98

© LIBRAIRIE ARMAND COLIN, PARIS 1974

« La loi du 11 mars 1957 n'autorisant, aux termes des alinéas 2 et 3 de l'article 41, d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation intégrale, ou partielle, faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants-droit ou ayants-cause, est illicite » (alinéa 1^{er} de l'article 40).
« Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles 425 et suivants du Code Pénal. »

Sauf au paragraphe 1.1, les espaces vectoriels considérés dans ce chapitre sont de dimension finie.

1.1 VALEURS PROPRES - VECTEURS PROPRES

Soit u un endomorphisme du K -espace vectoriel E . Un scalaire λ est appelé **valeur propre** de u si il existe un vecteur non nul, de E tel que $u(x) = \lambda x$.

L'ensemble (éventuellement vide) des valeurs propres de u est appelé **spectre** de u .
Un vecteur x de E est appelé **vecteur propre** de u s'il existe une valeur propre λ telle que $u(x) = \lambda x$.
L'ensemble des vecteurs propres relatifs à une même valeur propre λ est un sous-espace de E , appelé **espace propre associé à λ** .

Remarques.

- Un vecteur propre non nul est associé à une valeur propre unique. Le vecteur nul est associé à toutes les valeurs propres.
- L'endomorphisme u possède la valeur propre 0 si, et seulement si, u n'est pas injectif.

Exemple. — Soit E le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des applications indéfiniment dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui à toute application associe l'application dérivée. Le spectre de u est $\mathbb{R}$ tout entier. Les applications $x \rightarrow \mu e^{\lambda x}$, où $\mu \in \mathbb{R}$, sont des vecteurs propres associés à la valeur propre λ .

1.2 POLYNÔMES CARACTÉRISTIQUES

1.2.1 Théorème.

Le scalaire λ est valeur propre de l'endomorphisme u si, et seulement si, $\det(u - \lambda \text{Id}_E) = 0$.
En effet, λ est valeur propre si, et seulement si, $u - \lambda \text{Id}_E$ n'est pas injectif.

1.2.2 Polynôme caractéristique d'une matrice.

Soit A une matrice carrée d'ordre n à coefficients dans le corps K . La matrice $A - XI_n$ est une matrice à coefficients dans $K[X]$. Son déterminant est un polynôme en X , appelé **polynôme caractéristique de A** et noté $P_A(X)$. Les racines de $P_A(X)$ dans K sont appelées **valeurs propres de A** . On montre que $P_A(X)$ est un polynôme de degré n dont on peut préciser certains coefficients.

$$P_A(X) = (-1)^n X^n + (-1)^{n-1} (\text{Tr } A) X^{n-1} + \dots + (-1)^0 \det A$$

On note $\text{Tr } A$ la trace de A , c'est-à-dire, la somme des termes diagonaux de A .

● **Théorème.** — Deux matrices semblables A et A' ont même polynôme caractéristique.
En effet, si $A' = P^{-1}AP$, nous avons $A' - XI_n = P^{-1}AP - P^{-1}(XI_n)P = P^{-1}(A - XI_n)P$.

1.2.3 Polynôme caractéristique d'un endomorphisme.

Il résulte de 1.2.2 que toutes les matrices associées à un même endomorphisme u ont même polynôme caractéristique. On l'appelle **polynôme caractéristique de u** et on le note $P_u(X)$. Il résulte de 1.2.1 que λ est valeur propre de u si, et seulement si, $P_u(\lambda) = 0$.

1.2.4 Remarques.

- Un endomorphisme d'espace de dimension n (ou une matrice carrée d'ordre n) a au moins une valeur propre. Le nombre de ces valeurs propres, comptées avec leur multiplicité, est égal à n .
- Lorsque K est algébriquement clos, en particulier pour $K = \mathbb{C}$, tout endomorphisme d'espace de dimension n (ou toute matrice carrée d'ordre n) a, au moins, une valeur propre. Le nombre de ces valeurs propres, comptées avec leur multiplicité, est égal à n .