

TABLE DES MATIÈRES

N ^{os} des leçons	Pages
1. Espaces vectoriels	3
2. Applications linéaires	7
3. Espaces produits. Espaces quotients. Sommes directes	11
4. Indépendance linéaire. Bases	15
5. Espaces vectoriels de dimension finie	19
6. Applications linéaires en dimension finie	25
7. Algèbres	30
8. Espace dual. Bidual	35
9. Orthogonalité. Transposition	40
10. Matrices	45
11. Changement de bases. Rang d'une matrice	54
12. Groupe symétrique	60
13. Applications multilinéaires	66
14. Formes bilinéaires. Formes quadratiques	69
15. Déterminants	76
16. Propriétés et applications des déterminants	83
17. Systèmes d'équations linéaires	89
18. Valeurs propres, vecteurs propres. Diagonalisation	95
Problèmes de révision générale	102
Exercices et problèmes non résolus	113
Problèmes d'examen	119

© LIBRAIRIE ARMAND COLIN, PARIS, 1973

" La loi du 11 mars 1957 n'autorisant, aux termes des alinéas 2 et 3 de l'article 41, d'une part, que les " copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective " et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, " toute représentation intégrale, ou partielle, faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause, est illicite " (alinéa 1^{er} de l'article 40).
" Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles 425 et suivants du Code Pénal. "

1.1 GÉNÉRALITÉS

1.1.1 Définition. — Soit K un corps commutatif, on appelle **espace vectoriel sur K** par un ensemble E , une loi de groupe abélien sur E notée $+$ et une loi externe, c'est-à-dire les éléments de K , et de minuscules latines pour représenter les vecteurs dans E , possédant les propriétés suivantes, quels que soient x et y de E et quels que soient λ et μ de K :

$$\begin{aligned}\lambda(x + y) &= \lambda x + \lambda y \\ (\lambda + \mu)x &= \lambda x + \mu x \\ \lambda(\mu x) &= (\lambda\mu)x \\ 1_K x &= x\end{aligned}$$

Notons que, dans cette définition, le signe $+$ désigne tout à la fois l'addition de E et la multiplication de K et la loi externe de E . L'emploi de minuscules latines pour représenter les vecteurs est donc ambigu. On supprime toute ambiguïté.

1.1.2 Exemples :

a) Un corps L , commutatif ou non, est canoniquement muni d'une structure d'espace vectoriel sur son sous-corps premier K (en particulier sur son sous-corps premier). L'addition est celle de L et la multiplication est celle de L à $K \times L$.

b) K^n muni des deux lois suivantes :

$$\begin{aligned}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) + (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n) &= (\lambda_1 + \mu_1, \lambda_2 + \mu_2, \dots, \lambda_n + \mu_n) \\ \lambda(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) &= (\lambda\lambda_1, \lambda\lambda_2, \dots, \lambda\lambda_n)\end{aligned}$$

est un espace vectoriel sur K .

c) L'ensemble des applications d'un ensemble X dans un corps commutatif K muni de l'addition et de la multiplication par :

$$\begin{aligned}(f + g)(x) &= f(x) + g(x) \\ (\lambda f)(x) &= \lambda f(x)\end{aligned}$$

pour tout x de X .

est un espace vectoriel sur K . Remarquons que, lorsque X est le sous-ensemble fini de E , l'espace vectoriel n'est autre que K^n défini au b).

d) L'ensemble des polynômes à n indéterminées sur un corps commutatif K est un espace vectoriel sur K .

e) E étant un espace vectoriel sur K , et K' un sous-corps de K , l'addition de E et la multiplication par K' font de E un espace vectoriel sur K' .

1.1.3 Règles de calcul. — Les propriétés suivantes sont conséquences immédiates des propriétés de K :

$$\begin{aligned}\lambda 0 &= 0 \quad \text{et} \quad 0x = 0 \\ (-\lambda)x &= \lambda(-x) = -(\lambda x) \\ \lambda(x - y) &= \lambda x - \lambda y \quad \text{et} \quad (\lambda - \mu)x = \lambda x - \mu x \\ \lambda x &= 0 \quad \text{entraîne} \quad \lambda = 0 \quad \text{ou} \quad x = 0\end{aligned}$$

1.2 SOUS-ESPACES VECTORIELS

1.2.1 Définition. — Une partie E' d'un K -espace vectoriel E est un **sous-espace vectoriel** de E si, munie des lois induites, E' est un K -espace vectoriel.

Remarquons que tout sous-espace vectoriel de E est, en particulier, un sous-groupe abélien de $(E, +)$.

1.2.2 Propriétés caractéristiques.

On démontre qu'une partie non vide E' d'un K -espace vectoriel E est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si elle vérifie les deux lois, c'est-à-dire :

$$\begin{aligned}(\forall x \in E') \quad (\forall y \in E') \quad (x + y \in E') \\ (\forall x \in E') \quad (\forall \lambda \in K) \quad (\lambda x \in E')\end{aligned}$$

Ceci est encore équivalent à :

$$(\forall x \in E') \quad (\forall y \in E') \quad (\forall \lambda \in K) \quad (\forall \mu \in K) \quad (\lambda + \mu)x \in E'$$

1.2.3 Exemples :

a) $\{0\}$ et E sont des sous-espaces de E , respectivement le plus petit et le plus grand sous-espace de E .