

TABLE DES MATIERES

	Pages
Chapitre 1. ENSEMBLES	1
Ensembles. Ensembles égaux. Sous-ensembles d'un ensemble. Univers. Intersection et réunion d'ensembles. Diagrammes de Venn. Opérations sur les ensembles. Ensemble produit. Applications. Applications injectives. Applications bijectives d'un ensemble dans lui-même	
Chapitre 2. RELATIONS ET LOIS DE COMPOSITIONS	15
Relations. Propriétés des relations binaires. Relations d'équivalence. Classes d'équivalence. Relations d'ordre dans un ensemble. Types de lois de composition. Lois de composition bien-définies. Isomorphismes. Permutations. Transpositions. Systèmes algébriques.	
Chapitre 3. LES ENTIERS NATURELS	31
Les postulats de Peano. L'addition. La multiplication. Le raisonnement par récurrence. Les relations d'ordre. Multiples et puissances. Ensemble isomorphes.	
Chapitre 4. LES ENTIERS RELATIFS	40
Introduction. La relation binaire $\sim$. L'addition et la multiplication. Les entiers positifs. Zéro et les entiers négatifs. Les entiers relatifs. Les relations d'ordre. La soustraction. Valeur absolue. Autres propriétés des entiers. Multiples et puissances .	
Chapitre 5. QUELQUES PROPRIETES DES ENTIERS	51
Diviseurs. Nombres premiers. Plus grand commun diviseur. Entiers premiers entre eux. Facteurs premiers. Congruences. L'algèbre des classes résiduelles. Congruences du premier degré. Notation des entiers	
Chapitre 6. LES NOMBRES RATIONNELS	62
Les nombres rationnels. L'addition et la multiplication. La soustraction et la division. Notation. Relations d'ordre. Réduction des fractions. Représentation décimale	
Chapitre 7. LES NOMBRES REELS	67
Introduction. Coupures de Dedekind. Coupures positives. Inverses. Opposés. Multiplication. Soustraction et division. Relations d'ordre. Propriétés des nombres réels. Résumé	
Chapitre 8. LES NOMBRES COMPLEXES	77
Le système des nombres complexes. L'addition et la multiplication. Propriétés des nombres complexes. Soustraction et division. Représentation trigonométrique. Racines. Racines primitives de l'unité	

Chapitre 9. GROUPES.	Pages 84
Groupes. Propriétés élémentaires des groupes. Sous-groupes. Groupes cycliques. Groupes de permutations. Homomorphismes. Isomorphismes. Classes à gauche ou à droite. Sous-groupes distingués. Groupes quotients. Suites de composition.	
Chapitre 10. ANNEAUX.	103
Anneaux. Propriétés des anneaux. Sous-anneaux. Types d'anneaux. Caractéristique. Diviseurs de zéro. Homomorphismes et isomorphismes. Idéaux. Idéaux principaux. Idéaux premiers et maximaux. Anneaux quotients. Anneaux euclidiens.	
Chapitre 11. DOMAINES D'INTEGRITE, CORPS, CORPS COMMUTATIFS.	116
Domaines d'intégrité. Unités, éléments associés, diviseurs. Sous-anneaux intégrés. Anneaux intégrés ordonnés. Algorithme de la division. Factorisation unique. Corps. Corps commutatifs.	
Chapitre 12. POLYNOMES.	127
Introduction. Polynômes formels. Polynômes unitaires. Anneaux de polynômes commutatifs unitaires. Substitution. L'anneau de polynômes intégré $\mathcal{F}[x]$. Polynômes premiers. L'anneau de polynômes intégré $C[x]$. Plus grand commun diviseur. Propriétés de l'anneau de polynômes intégré $\mathcal{F}[x]$.	
Chapitre 13. ESPACES VECTORIELS.	146
Introduction. Espaces vectoriels. Sous-espace d'un espace vectoriel. Dépendance linéaire. Bases d'un espace vectoriel. Espaces vectoriels sur R . Applications linéaires. Algèbre des endomorphismes d'un espace vectoriel.	
Chapitre 14. MATRICES.	168
Introduction. Matrices carrées. Algèbre des matrices. Matrice d'ordre $m \times n$. Résolution des systèmes linéaires. Transformations élémentaires d'une matrice. Matrices triangulaires supérieures, triangulaires inférieures et diagonales. Forme canonique. Transformations élémentaires des colonnes. Matrices élémentaires. Inverses des matrices élémentaires. Inverse d'une matrice non singulière. Polynôme minimal d'une matrice carrée. Systèmes d'équations linéaires. Déterminant d'une matrice carrée. Propriétés des déterminants. Calcul des déterminants.	
Chapitre 15. POLYNOMES MATRICIELS.	203
Matrices à éléments polynomiaux. Transformations élémentaires. Forme normale. Polynômes à coefficients matriciels. Algorithme de la division. Valeurs propres et vecteurs propres d'une matrice. Matrices semblables. Matrices symétriques réelles. Matrices orthogonales, coniques et quadriques.	
Chapitre 16. ALGEBRES.	224
Algèbres. Isomorphisme.	
Chapitre 17. ALGEBRES DE BOOLE.	227
Algèbre de Boole. Fonctions booléennes. Formes normales. Changement de la forme d'une fonction booléenne. Relation d'ordre dans une algèbre de Boole. Algèbre des circuits électriques. Simplification des circuits.	
INDEX.	243

CHAPITRE I

Ensembles

ENSEMBLES

Toute collection d'objets comme (a) les points d'un segment, (b) les droites passant par un point donné dans l'espace ordinaire, (c) les nombres inférieurs à dix, (d) les cinq fils Dupont et leur chien, (e) les personnes d'un ensemble ou une classe. Les points, droites, nombres, fils et chiens sont appelés *éléments* de ces ensembles respectifs. En général, les lettres majuscules et des éléments arbitraires de ces ensembles.

Soit A un ensemble donné et p et q certains objets. Quand p est un élément de A , on indique cela en écrivant $p \in A$; quand à la fois p et q sont des éléments de A , on écrit $p, q \in A$ au lieu de $p \in A$ et $q \in A$; quand q n'est pas un élément de A , on écrit $q \notin A$.

Bien que, dans une grande partie de notre étude des ensembles, nous ne nous occuperons que de la nature des éléments considérés, les ensembles de nombres réels, rationnels, entiers, naturels, etc., sont des exemples et problèmes. Par commodité nous réservons à présent les lettres

N pour désigner l'ensemble des entiers naturels,

Z pour désigner l'ensemble des entiers relatifs,

Q pour désigner l'ensemble des nombres rationnels,

R pour désigner l'ensemble des nombres réels.

Exemple 1: (a) $1 \in N$ et $205 \in N$ puisque 1 et 205 sont des entiers naturels, mais $\frac{1}{2} \notin N$ et $-5 \notin N$ puisque $\frac{1}{2}$ et -5 ne sont pas des entiers naturels.

(b) Le symbole $\in$ indique l'appartenance et peut être lu "est dans", "soit dans" selon le contexte. "Supposons que r soit dans Q " et "Pour tout p et q dans Z ". Nous allons parfois écrire $p, q \in Z$ au lieu de $p \in Z$ et $q \in Z$ avec $p \neq 0$.

Les ensembles qui seront introduits ici seront toujours bien définis, c'est-à-dire qu'il sera toujours possible de déterminer si un objet donné fait ou non partie d'un ensemble. Les ensembles du premier paragraphe ont été définis au moyen de propriétés par des mots: on dit qu'on les a définis en compréhension. Quel que soit l'ensemble, on peut le représenter sous forme d'un tableau en exhibant ses éléments entre deux accolades, ou bien en extension; par exemple

$A = \{a\}$ est l'ensemble constitué par le seul élément a .

$B = \{a, b\}$ est l'ensemble constitué par les deux éléments a et b .

$C = \{1, 2, 3, 4\}$ est l'ensemble des entiers naturels inférieurs à 5.

$K = \{2, 4, 6, \dots\}$ est l'ensemble de tous les entiers naturels pairs.

$L = \{\dots, -15, -10, -5, 0, 5, 10, 15, \dots\}$ est l'ensemble des entiers relatifs multiples de 5.