

MÉTHODES DE CALCUL NUMÉRIQUE

TABLE DES MATIÈRES

CONTENTS	p a g e s
AVANT PROPOS	10
Chapitre 1 : INTRODUCTION	12
1. Utilité et limitation des méthodes numériques	15
2. Problèmes à résoudre	16
3. Développement en série de Taylor	18
Chapitre 2 : RESOLUTION D'UN SYSTEME D'EQUATIONS. INVERSION DE MATRICES.	19
1. Introduction	19
2. Méthode du pivot	22
2.1. Exposé de la méthode	22
2.2. Méthode de Gauss-Jordan : procédure	24
2.3. Méthode de Gauss	27
2.4. Cas des matrices bandes	28
2.5. Matrices tridiagonales : méthode du double balayage de Choleski	30
3. Inversion de matrices	33
4. Méthodes itératives	35
4.1. Méthode de Jacobi	35
4.2. Méthode de Gauss-Siedel	35
4.3. Facteur de relaxation	37
5. Méthode de Crout : décomposition L-R	39
6. Systèmes surdéterminés	42
7. Systèmes homogènes	46
8. Calcul d'un déterminant	50
8.1. Méthode générale	50
8.2. Cas des matrices tridiagonales	51
Chapitre 3 : CALCUL DES DERIVEES : DIFFERENCES FINIES	53
1. Position du problème	53
2. Différences à droite	54
2.1. Opérateur "différence à droite"	54
2.2. Dérivées successives de $f(x)$ à l'ordre 1 en h	55
2.3. Dérivées successives de $f(x)$ à l'ordre 2 en h	57
3. Différences à gauche	59
3.1. Opérateur "différence à gauche"	59
3.2. Dérivées successives de $f(x)$ à l'ordre 1 en h	59
3.3. Dérivées successives de $f(x)$ à l'ordre 2 en h	60
4. Différences centrées	61

Tous droits de traduction, d'adaptation et de reproduction par tous procédés, réservés pour tous pays.

La loi du 11 mars 1957 n'autorisant, aux termes des alinéas 2 et 3 de l'article 41, d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale, ou partielle, faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause, est illicite » (alinéa 1^{er} de l'article 40).

Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles 425 et suivants du Code pénal.

© Masson, Paris, 1983
ISBN : 2-225-78980-0

MASSON S.A.	120 Bd Saint-Germain, 75280 Paris Cedex 06
MASSON PUBLISHING U.S.A. Inc.	133 East 58 th Street, New York, N.Y. 10022
TORAY-MASSON S.A.	Balmes 151, Barcelona 8
MASSON ITALIA EDITORI S.p.A.	Via Giovanni Pascoli 55, 20133 Milano
MASSON EDITORES	Dakota 383 Colonia Napoles, Mexico 18 DF
EDITORIA MASSON DO BRASIL Ltda	Rua Dr Cesario Motta Jr, 61, 01221 Sao Paulo, s.p.

5. Dérivée d'une fonction définie en des points non régulièrement espacés	64
5.1. Méthode de calcul	64
5.2. Exemples	66
5.3. Incertitude sur le calcul de la dérivée	68

Chapitre 4 : INTERPOLATION ET EXTRAPOLATION 70

1. Construction et propriétés des tables de différences	70
1.1. Construction des tables	70
1.2. Propriétés des tables de différences d'un polynôme	74
1.3. Expressions des opérateurs $\Delta^n f$	77
2. Interpolation de fonctions définies sur un pas constant	81
2.1. Opérateur liant $f(x) = f(x_j + rh)$ à $f(x_j)$	81
2.2. Formule d'interpolation de Grégory-Newton par les différences à droite	83
2.3. Formule d'interpolation de Grégory-Newton par les différences à gauche	83
2.4. Formule d'interpolation utilisant les différences centrées	84
2.5. Utilisation des formules d'interpolation	85
3. Interpolation à partir de points irrégulièrement espacés : polynômes de Lagrange	86
3.1. Expression du polynôme d'interpolation	86
3.2. Erreur d'interpolation et choix optimal des x_j	87
4. Interpolation cubique	88
5. Choix de la base et du support d'interpolation	93
5.1. Interpolation de Tchebychev	93
5.2. Interpolation de fonctions périodiques	95
6. Extrapolation	96
7. Interpolation de fonctions de deux variables	97
7.1. Polynômes d'interpolation	97
7.2. Interpolation sur 4 points	98
7.3. Interpolation sur 9 points	101
7.4. Interpolation sur n points quelconques	103
7.5. Eléments de référence	107
7.6. Erreur d'approximation	113

Chapitre 5 : RACINES D'EQUATIONS 115

1. Introduction	115
2. Bissection	116
3. Méthode de Newton	117
3.1. Principe de la méthode	117
3.2. Cas des racines multiples	118
4. Méthode de la sécante	119
5. Utilisation de l'interpolation inverse	120
6. Racines d'un polynôme (méthode de Bairstow)	121
7. Recherche des extrema d'une fonction	125

Chapitre 6 : VALEURS PROPRES ET VECTEURS PROPRES DE MATRICES CARREES 126

1. Rappels de notions fondamentales	126
2. Détermination du vecteur propre correspondant à une valeur propre connue	129
3. Recherche des valeurs propres par résolution de l'équation caractéristique	130
3.1. Détermination de $P_n(\lambda)$ point par point	130
3.2. Détermination des coefficients de $P_n(\lambda)$: méthode de Krylov	130
3.3. Détermination des coefficients de $P_n(\lambda)$: méthode de Souriau	131
4. Méthode de la puissance itérée	132
4.1. Principe de la méthode : calcul de la plus grande valeur propre	132
4.2. Déflation de la matrice	135
5. Méthodes utilisant les matrices semblables	138
5.1. Définitions et propriétés des matrices semblables	138
5.2. Méthode de Rutishauser (algorithme L-R)	139
5.3. Méthode de Householder	140

Chapitre 7 : LISSAGE DE COURBES, METHODE DES MOINDRES CARRES 144

1. Principe de la méthode	144
2. Lissage par un polynôme	146

Chapitre 8 : METHODES NUMERIQUES D'INTEGRATION 150

1. Méthode des trapèzes	150
2. Méthode de Simpson	153
3. Formules de Newton-Cotes	156
4. Méthode de Romberg	157
4.1. Principe	157
4.2. Procédure	159
5. Méthode de Gauss	161
6. Intégration sur un pas quelconque	165
6.1. Méthode générale	165
6.2. Méthode sur trois points	166
7. Problèmes posés par les limites infinies	168
7.1. Intégration sur un domaine infini	168
7.2. Singularités de l'intégrande	169

Chapitre 9 : RESOLUTION D'EQUATIONS DIFFERENTIELLES 172

1. Introduction	172
1.1. Problèmes aux conditions initiales	172
1.2. Problèmes aux conditions aux limites	175

2. Méthode d'Euler	176
2.1. Exposé de la méthode	176
2.2. Erreur de troncature	177
2.3. Convergence et stabilité	179
3. Formules de Runge-Kutta : méthode à pas unique	180
3.1. Formule d'ordre 2	181
3.2. Formule d'ordre 4	182
4. Méthodes d'Adams : méthodes à pas multiple	183
4.1. Formules d'Adams ouvertes	183
4.2. Formules d'Adams fermées	186
5. Méthodes de prédictor-correcteur	188
6. Problèmes avec conditions aux limites : méthode de tir	190
6.1. Exposé de la méthode de tir	191
6.2. Méthode de tir pour les équations différentielles linéaires	192
6.3. Exemple de système d'équations du 1er ordre avec conditions aux limites	194
6.4. Equations non linéaires, ou à coefficients fonction de l'inconnue	195
7. Problèmes avec conditions aux limites : méthode matricielle : équations différentielles du second ordre	196
7.1. Conditions aux limites portant sur la fonction $y(x)$	197
7.2. Conditions aux limites portant sur la dérivée dy/dx	198
7.3. Méthode matricielle : récapitulation des résultats	200
7.4. Equations à coefficients dépendant de l'inconnue, équations non linéaires	201
7.5. Equations différentielles du 2ème ordre avec conditions initiales	201

Chapitre 10 : EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES 204

1. Introduction	204
2. Expressions des dérivées partielles	205
3. Conditions aux limites	207
3.1. Cas où le contour suit le maillage	207
3.2. Cas d'un contour quelconque	208
4. Equations du 1er ordre : méthode des caractéristiques	210
4.1. Courbes caractéristiques	210
4.2. Exemples et problèmes liés aux conditions aux limites	212
4.3. Méthode numérique d'intégration	217
4.4. Systèmes d'équations du premier ordre	220
5. Généralités sur les équations du second ordre	222
6. Equations paraboliques	225
6.1. Méthode explicite	226
6.2. Méthode implicite	228
6.3. Méthode de Crank-Nicholson	230
7. Equations elliptiques	232
7.1. Expression à l'aide des différences finies	232
7.2. Méthode de résolution directe	235
7.3. Méthode itérative de Gauss-Siedel	237
7.4. Méthode itérative du double balayage de Choleski	238

7.5. Equipotentiellles et lignes de champ	240
8. Equations hyperboliques	244
8.1. Considérations générales	244
8.2. Méthode des différences	246
8.3. Méthode des caractéristiques	250

Chapitre 11 : METHODE DES ELEMENTS FINIS 261

1. Introduction	261
2. Forme intégrale des équations aux dérivées partielles	262
2.1. Méthode des résidus pondérés	262
2.2. Intégration par parties (forme intégrale faible)	264
2.3. Discrétisation des formes intégrales	266
3. Forme matricielle élémentaire	267
3.1. Forme intégrale de l'équation à résoudre	267
3.2. Discrétisation	270
3.3. Utilisation des éléments de référence	274
4. Assemblage des matrices élémentaires	278
5. Résolution du système, conditions aux limites	284
6. Avantages et inconvénients de la méthode	287

Chapitre 12 : METHODES DE MONTE CARLO 290

1. Présentation des méthodes de Monte Carlo	290
2. Nombres aléatoires et pseudo aléatoires	292
2.1. Distributions rectangulaires	292
2.2. Distributions non rectangulaires : méthode directe	294
2.3. Distributions non rectangulaires : méthode du rejet de Von Neumann	297
3. Calculs d'intégrales	298
3.1. Principe du calcul	298
3.2. Echantillonnages simple et stratifié	299
3.3. Transformations antithétiques	301
3.4. Autres méthodes de réduction de variance	303
3.5. Calcul d'intégrales multiples	304
4. Simulation de trajectoires avec collisions	305
4.1. Principe de la méthode	305
4.2. Illustration concrète de la méthode	307
5. Conclusion	314

BIBLIOGRAPHIE 315

INDEX DES MATIERES 316