

TABLE DES MATIÈRES

PRÉFACE.....	v
CHAPITRE PREMIER. — <i>Éléments de géométrie affine</i>	5
<i>L'espace $\mathbf{R}^n$</i>	5
1. La droite numérique $\mathbf{R}$	5
2. L'espace $\mathbf{R}^n$	6
3. Bases de $\mathbf{R}^n$. Orientation	6
4. Sous-espace de $\mathbf{R}^n$	8
5. L'espace dual de $\mathbf{R}^n$	9
6. Notion générale de forme multilinéaire	10
7. Notion de tenseur	13
<i>La géométrie affine</i>	15
8. L'espace affine α^n	15
9. Variétés linéaires.....	16
10. Groupes de points. Barycentre	18
11. La géométrie affine	20
<i>Exercices</i>	21
CHAPITRE II. — <i>La géométrie euclidienne</i>	24
1. L'espace euclidien $\mathcal{E}^n$	24
2. Déplacements euclidiens	25
3. Rotations. Notion d'angle	27
4. Applications affines, isométriques ou conformes, de $\mathcal{E}^p$ dans $\mathcal{E}^n$	28
5. Produit mixte et produit vectoriel.....	30
6. Utilisation de repères non orthonormaux ; coordonnées covariantes ...	32
7. Extensions diverses de la géométrie euclidienne	35
<i>Exercices</i>	37
CHAPITRE III. — <i>Champs de tenseurs. Repères variables</i>	41
1. Dérivation des fonctions vectorielles.....	41
2. Dérivées des produits usuels.....	42
3. Champs de tenseurs : formes différentielles	43
4. La théorie du repère mobile.....	44
5. Repères attachés à un système de coordonnées curvilignes	45
6. Différentielles absolues.....	47
7. Détermination du mouvement d'un repère dépendant d'un paramètre numérique connaissant les fonctions π^i , π^j	48
8. Détermination d'un repère variable par la donnée des formes fondamentales (cas général).....	50

9. Repère mobile dans l'espace euclidien.....	52
10. Résultats pratiques	54
11. Cas de l'espace euclidien à trois dimensions	54
<i>Exercices</i>	56
CHAPITRE IV. — La notion de courbe	61
<i>Généralités; arcs rectifiables</i>	61
1. Notion d'arc paramétré.....	61
2. Arcs géométriques	62
3. Notion géométrique de sous-arc.....	64
4. Longueur d'un arc; représentation normale	65
<i>Arcs réguliers</i>	67
5. Tangente. Notion d'arc régulier	67
6. Invariants d'ordre supérieur à un	69
7. Diverses définitions des courbes de $\mathbf{R}^n$	71
<i>Théorie du contact</i>	74
8. Contact de deux arcs de $\mathbf{R}^n$	74
9. Détermination de l'ordre de contact de deux arcs	76
10. Usage de représentations paramétriques privilégiées.....	78
11. Transformé d'un arc par difféomorphisme; invariance de l'ordre de contact	80
<i>Exercices</i>	82
CHAPITRE V. — Étude des courbes régulières de l'espace euclidien à deux ou trois dimensions	85
1. Introduction	85
2. Invariants d'ordre 1 et 2; courbure, trièdre de Serret-Frenet	81
3. Usage d'une représentation paramétrique quelconque	87
4. Invariants d'ordre 3; torsion, formules de Frenet.....	88
5. Condition de contact de deux arcs	89
6. Applications de la théorie du repère mobile à la détermination d'une courbe par ses équations intrinsèques	90
7. Propriétés caractéristiques des hélices	93
8. Enveloppe d'une famille de droites dépendant d'un paramètre.....	95
9. Exemple d'enveloppe: développées d'une courbe de $\mathcal{S}^3$	97
10. Détermination d'une courbe de $\mathbf{R}^3$ par ses plans osculateurs; enveloppe d'une famille de plans.....	99
<i>Exercices</i>	103
CHAPITRE VI. — La notion de variété	106
1. Introduction. Divers aspects de la notion intuitive de surface en géométrie élémentaire.	106
2. La notion élémentaire de variété paramétrée dans l'espace $\mathbf{R}^n$	107
3. Diverses définitions locales d'une variété régulière	109
4. Notion globale de variétés: préliminaires.....	110
5. La notion intrinsèque de variété	112
6. Exemples de variétés définies par plongement	114
7. Exemples de variétés abstraites.....	116
8. Applications d'une variété dans une autre; immersions, plongements.....	117
9. Notion de variété linéaire tangente	119
10. Contact de variétés de même dimension	121
11. Contact de variétés de dimensions différentes	123
<i>Exercices</i>	126

CHAPITRE VII. — Formes différentielles. Transformation des intégrales multiples	129
1. Retour sur la notion de forme différentielle.....	129
2. Produit de deux formes différentielles.....	131
3. Transposition des formes différentielles; application aux intégrales multiples	132
4. Formes différentielles définies sur une variété	134
5. Intégrale d'une forme différentielle de degré p sur une variété de dimension p	135
6. Différentielle extérieure. Formule de Riemann-Green	137
7. Formule de Stokes pour les variétés de dimension 2	140
8. Extension de la formule de Stokes aux variétés de dimension quelconque.....	142
<i>Exercices</i>	144
CHAPITRE VIII. — Les formes quadratiques fondamentales d'une variété	147
<i>Notion de métrique riemannienne; géodésique</i>	147
1. La première forme fondamentale.....	147
2. Notion de mesure p -dimensionnelle.....	149
3. Notion de variété riemannienne; distance géodésique	151
4. Géodésiques	153
5. Propriétés des géodésiques issues d'un point	156
6. Isométries; transformations conformes	158
<i>Courbure normale; courbure géodésique</i>	160
7. Normale à une hypersurface; deuxième forme fondamentale	160
8. Propriétés liées à la courbure normale	163
9. Détermination d'une hypersurface par ses deux formes fondamentales. Théorème de Bonnet	165
10. La courbure géodésique	167
11. Notions de géométrie riemannienne	169
<i>Exercices</i>	170
CHAPITRE IX. — Les formules classiques de la théorie des surfaces	174
1. Notations courantes; formes fondamentales	174
2. Courbures et directions principales.....	177
3. Exemples. Surfaces remarquables	178
4. Le trièdre de Darboux; notion de torsion géodésique	181
5. Propriétés des lignes de courbure.....	184
<i>Exercices</i>	187
CHAPITRE X. — Éléments de géométrie riemannienne à deux dimensions	190
1. Retour à la théorie du repère mobile	190
2. Courbure géodésique	193
3. Théorème de Gauss; résumé des résultats.....	195
4. Notion de géométrie riemannienne à deux dimensions	197
5. Formule de Bonnet (cas élémentaire)	199
6. Formule de Bonnet (cas général); caractéristique d'Euler-Poincaré.....	203
<i>Exercices</i>	205
CHAPITRE XI. — Les géométries non euclidiennes	207
<i>La géométrie projective</i>	207
1. Définition et propriétés topologiques de l'espace projectif P^n	207
2. Notions de points indépendants et de variété linéaire.....	208

3. La structure de variété de P^n	210
4. Le groupe projectif	211
5. Variétés de l'espace projectif	212
<i>La géométrie elliptique</i>	214
6. L'espace elliptique	214
7. La géométrie elliptique à deux dimensions	217
<i>La géométrie hyperbolique</i>	220
8. L'espace hyperbolique	220
9. Notions de géométrie hyperbolique	222
10. La géométrie hyperbolique à deux dimensions	225
<i>Exercices</i>	229
CHAPITRE XII. — <i>Les axiomes de la géométrie élémentaire</i>	230
1. Introduction. Axiomes de base	230
2. Notion de déplacement, axiomes de pliage	232
3. Rotations	234
4. Mesure des angles	236
5. Propriétés des triangles ; axiomes d'Euclide	239
6. Orientation ; déplacements directs	242
<i>Exercices</i>	246
<i>Index des notations</i>	247
<i>Bibliographie</i>	253
<i>Index alphabétique des matières</i>	255

N. B. — Les références telles que V, 8, 3 désignent la proposition (ou la formule) 3, au paragraphe 8 du chapitre V ; le numéro du chapitre est omis lorsqu'il s'agit du chapitre en cours.

Les chiffres entre crochet renvoient à la bibliographie placée à la fin du livre.

CHAPITRE PREMIER

ÉLÉMENTS DE GÉOMÉTRIE AFFINE

I. — L'ESPACE $\mathbf{R}^n$

Les espaces étudiés en géométrie différentielle sont localement homéomorphes à $\mathbf{R}^n$: ou, de façon plus concrète, ces espaces, appelés *variétés*, s'obtiennent en « recollant », selon certaines règles, des ouverts connexes de $\mathbf{R}^n$ (1). Les propriétés locales de ces espaces sont donc celles de l'espace $\mathbf{R}^n$ et nous allons commencer par étudier celles-ci en détail. Cette étude supposera connus les éléments de l'algèbre linéaire.

1. — La droite numérique $\mathbf{R}$.

Désignons momentanément par K le corps (2) des nombres réels. L'ensemble des $x \in K$ satisfaisant à $a < x < b$ (resp. $a \leq x \leq b$) constitue l'*intervalle ouvert* $]a, b[$ (resp. l'*intervalle fermé* $[a, b]$) ; on définit une *structure topologique* (2) sur K en prenant pour *ensembles ouverts* toutes les réunions d'intervalles ouverts ; et le corps K , muni de cette structure, constitue la *droite numérique $\mathbf{R}$* .

On sait que l'espace $\mathbf{R}$ est un *continu* (ce qui signifie qu'il ne peut être décomposé en deux ensembles ouverts sans point commun) ; on sait aussi que tout intervalle fermé de $\mathbf{R}$ est *compact*, de sorte que $\mathbf{R}$ est *localement compact* ; on peut donc le rendre compact par adjonction d'un point à l'infini : l'espace compact ainsi obtenu est la *droite numérique achevée* $\bar{\mathbf{R}}$.

L'addition [définie par $(x, y) \rightarrow x + y$] et la multiplication [définie par $(x, y) \rightarrow xy$] sont des applications continues de l'espace produit $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$: donc $\mathbf{R}$ peut être considéré comme un *espace vectoriel topologique* sur le corps K des nombres réels ; et la valeur absolue [définie par $|x| = \sup(x, -x)$] constitue une *norme* compatible avec cette structure. A cette norme est associée la métrique $d(x, y) = |y - x|$; et l'on sait que $\mathbf{R}$ est

(1) Pour une définition précise des variétés, voir chapitre VI.

(2) Pour les notions élémentaires de topologie et d'algèbre, dont nous aurons besoin ici, ou pourra consulter le cours de Mathématiques I.