

La démonstration de ce Théorème s'appuie sur la notion d'espace de Baire étudiée au chapitre III.

L'Appendice 5 (the last!) présente deux Théorèmes fondamentaux d'analyse dans l'espace $C(X)$ des fonctions continues sur l'espace compact X : Le Théorème de Stone Weirstrass (Théorème 5) et les propriétés d'approximation de fonctions continues qui s'en déduisent (Proposition 7 et 8).

Le Théorème d'Arzelà-Ascoli qui au moyen de la notion d'équicontinuité, permet d'identifier les parties compacts de $C(X)$, lorsque X est métrisable compact. Les deux Théorèmes utilisent de façon essentielle la structure compacte de l'espace X .

Tables des matières

Chapitre I : Ensembles - Relations	Page :
1- Opérations de la Théorie des ensembles	1
2- Relations	8
3- Quelques propriétés de l'ensemble $\mathbb{R}$	13
4- Développements usuels de nombres réels	14
5- Cardinaux	20
 Chapitre II : Structures topologiques	
1- Espaces Topologiques	27
2- Fonctions Continues	41
3- Axiomes de séparation	53
4- Espaces Connexes	66
 Chapitre III : Espaces métriques	
1- Distances	77
2- Suites de Cauchy - Espaces complets	87
3- Fonctions uniformément continues	94
4- Bases dénombrables - Espaces séparables	103
5- Produit infinis d'espaces métriques	107
6- Espaces de Baire	114
7- Compléments : Ensembles parfaits	118
 Chapitre IV : Espaces compacts -	
Espaces localement compacts	
1- Espaces compacts	121
2- Espaces métriques compacts	131
3- Fonctions continues et espaces compacts	135
4- Produit d'espaces compacts	140
5- Espaces localement compacts	145
6- Compactification	152

Chapitre V : Espaces de Banach

1- Espaces normés	156
2- Opérateurs linéaires continus	172
3- Espaces normés de dimension finie	185
4- Opérateurs linéaires continus dans les espaces de Banach	189
5- Dualité dans les espaces normés- Topologies faibles	199

Chapitre VI : Espaces de Hilbert

1- Formes hermitiennes	220
2- Orthogonalité	224
3- Bases orthonormales	232
4- Espace dual.....	239
5- L'espace de Hilbert L_2 (T)	241

Appendices

1- Sous-espaces-Hyperplans-Formes linéaires	255
2- Espaces vectoriels topologiques - Propriétés élémentaires	264
3- Caractérisation topologique des espaces normés de dimension finie	274
4- Le Théorème de Vitali-Hahn-Saks Convergence σ (L_1, L_∞).....	280
5- L'espace $C(X)$	291

Bibliographie	303
---------------------	-----

Index Terminologique	305
----------------------------	-----

N.B:

Les exercices se trouvent à la fin de chaque section.

CHAPITRE I

ENSEMBLES - RELATIONS

Dans ce chapitre on rappelle quelques notions de théorie des ensembles ainsi que certaines propriétés fondamentales des nombres réels dans le but de fixer le vocabulaire et les notations utilisés dans la suite.

1- OPERATIONS DE LA THEORIE DES ENSEMBLES :

Soit X un ensemble, on désigne par $\mathcal{P}(X)$ l'ensemble des parties de X ; si A est une partie de X on écrit $A \in \mathcal{P}(X)$ ou de façon équivalente $A \subset X$, (A inclus dans X). Il arrive souvent qu'une partie A de X soit spécifiée à l'aide d'une propriété (P) relative aux éléments de X ; ainsi, par exemple on note:

$$A = \{x \in X : x \text{ vérifie } (P)\}.$$

Par exemple dans l'ensemble $\mathbb{Z}$ des entiers rationnels la partie $\mathbb{N}$ des entiers naturels est définie par la propriété:

$$x \in \mathbb{Z} \text{ et } x \geq 0 \text{ i.e. } \mathbb{N} = \{x \in \mathbb{Z} : x \geq 0\}.$$

Définition 1.1:

Si $A, B \in \mathcal{P}(X)$, on définit les opérations suivantes dans $\mathcal{P}(X)$:

$$A \cup B = \{x \in X : x \in A \text{ ou } x \in B\} \text{ (réunion)}$$

$$A \cap B = \{x \in X : x \in A \text{ et } x \in B\} \text{ (intersection)}$$

$$A^c = \{x \in X : x \notin A\} \text{ (complémentaire)}$$

D'autres opérations peuvent être définies à l'aide des opérations de base données ci-dessus, et seront utilisées dans la suite. Ainsi on note:

- La différence: si $A, B \in \mathcal{P}(X)$

$$A \setminus B = A \cap B^c$$

$$B \setminus A = B \cap A^c$$

- La différence symétrique: $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

On remarquera aussi par exemple que:

$$A^c = X \setminus A, \quad A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$