

Logique et fondements de l'Informatique à l'Université Paris 7, il couvre un vaste panorama : algèbre de Boole, récursivité, théorie des modèles, théorie des ensembles, modèles de l'arithmétique et théorèmes de Gödel.

La notion de modèle est un élément central de l'ouvrage, et c'est à fort juste titre, car elle a aussi une place centrale en logique : malgré (ou grâce à) son caractère simple et même élémentaire, elle en éclaire tous les domaines, y compris ceux qui en paraissent les plus éloignés. Comment comprendre, par exemple, une démonstration de consistance en théorie des ensembles, sans avoir d'abord maîtrisé le concept de modèle de cette théorie ? comment saisir vraiment le théorème de Gödel sans avoir une idée sur les modèles non standard de l'arithmétique de Peano ? L'acquisition de ces notions sémantiques est, je le crois, caractéristique d'une véritable formation de logicien, à quelque niveau que ce soit. R. Cori et D. Lascar le savent fort bien, et leur livre va tout à fait dans ce sens. Qui plus est, ils ont réussi le difficile pari d'allier toute la rigueur nécessaire avec la clarté, le souci pédagogique et l'agrément de la lecture.

Nous disposons donc là d'un outil remarquable pour l'enseignement de la logique mathématique, et, vu le développement de la demande en ce domaine, il devrait connaître un franc succès. C'est, bien sûr, tout ce que je lui souhaite.

Paris, le 4 Novembre 1992

Jean-Louis Krivine

TABLE DES MATIERES DU TOME I

Préface	v
Table des matières du tome I	vii
Table des matières du tome II	x
Contents	xiii
Avant-propos	1
Introduction	3
Mode d'emploi	11
Chapitre 1 : Calcul propositionnel	15
1. Syntaxe	17
Les formules propositionnelles	17
Démonstrations par induction sur l'ensemble des formules	21
Arbre de décomposition d'une formule	23
Le théorème de lecture unique	25
Définitions par induction sur l'ensemble des formules	28
Substitutions dans une formule propositionnelle	29
2. Sémantique	32
Distributions de valeurs de vérité, tables de vérité	32
Tautologies, formules logiquement équivalentes	38
Quelques tautologies	42
3. Formes normales, systèmes complets de connecteurs	46
Opérations dans $\{0,1\}$ et formules	46
Formes normales	50
Systèmes complets de connecteurs	53
4. Lemme d'interpolation	55
Théorème de définissabilité	57
5. Théorème de compacité	59
Satisfaction d'un ensemble de formules	59
Le théorème de compacité du calcul propositionnel	62
Exercices	68
Chapitre 2 : Algèbres de Boole	79
1. Rappels d'algèbre et de topologie	81
Algèbre	81
Topologie	84
Application au calcul propositionnel	90
2. Définition des algèbres de Boole	91
Propriétés des anneaux de Boole, relation d'ordre	91
Les algèbres de Boole en tant qu'ensembles ordonnés	95

3. Atomes dans une algèbre de Boole	99
4. Homomorphismes, isomorphismes, sous-algèbres	101
Homomorphismes et isomorphismes	101
Sous-algèbres de Boole	106
5. Idéaux et filtres	109
Propriétés des idéaux	109
Idéaux maximaux	112
Filtres	114
Ultrafiltres	115
Bases de filtre	118
6. Le théorème de Stone	120
L'espace de Stone d'une algèbre de Boole	121
Le théorème de Stone	125
Les espaces booléens sont des espaces de Stone	126
Exercices	130
Chapitre 3 : Calcul des prédicats	137
1. Syntaxe	139
Langages du premier ordre	139
Les termes du langage	141
Les substitutions dans les termes	148
Les formules du langage	149
Variables libres, variables liées, formules closes	152
Les substitutions dans les formules	155
2. Les structures	158
Les réalisations d'un langage	160
Sous-structures, restrictions	162
Homomorphismes, isomorphismes	164
3. Satisfaction des formules dans les structures	167
Interprétation des termes du langage dans une structure	167
Satisfaction des formules du langage dans une structure	170
Equivalence universelle et conséquence sémantique	177
4. Formes prénexes et formes de Skolem	188
Formes prénexes	188
Formes de Skolem	191
5. Premiers pas en théorie des modèles	197
Satisfaction dans une sous-structure	197
Equivalence élémentaire	201
Langage associé à une structure, formules à paramètres	207
Relations et fonctions définissables dans une structure	210
6. Modèles non égalitaires	213
Exercices	216
Chapitre 4 : Théorèmes de complétude	227
1. Démonstrations formelles	229
Règles et axiomes	229
Démonstrations formelles	232
Théorème de finitude et lemme de déduction	235

2. Les modèles de Henkin	238
Les témoins de Henkin	238
Le théorème de complétude	241
3. La méthode de Herbrand	245
Quelques exemples	245
Les avatars d'une formule	248
4. Les démonstrations par coupure	254
La règle de coupure	254
Complétude de la méthode	257
5. La méthode de résolution	261
Unification	261
Les démonstrations par résolution	267
Exercices	277
Solutions des exercices du tome I	281
Chapitre 1	282
Chapitre 2	305
Chapitre 3	326
Chapitre 4	350
Bibliographie	361
Notations	365
Index	373